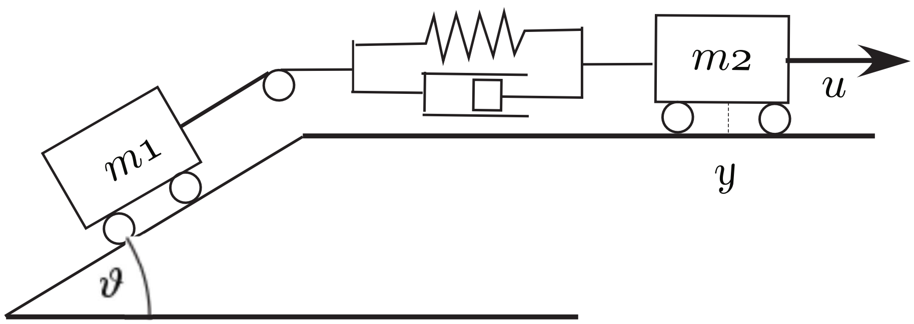
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 21/7/2016

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

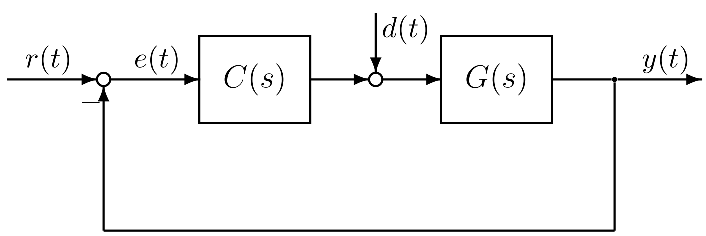
Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Si tratta di due carrelli, uno che si muove su di un piano inclinato, collegati tra loro tramite una molla e uno smorzatore. Lo smorzatore e' ideale con costante di attrito b mentre la molla e' ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L. Sul secondo carrello agisce una forza u mentre y e' la sua posizione.

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare $u(t) = \bar{u}$ costante che porta ad una evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ costante.
3. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + a}$$

1. Determinare i valori di K e a che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
2. Determinare la funzioni di trasferimento $T(s)$ dagli ingressi r all'uscita y e la funzione sensibilita' di T rispetto alle variazioni del parametro a.
3. Supponiamo che $a = 4$. Determinare i valori di K per i quali nel sistema in catena chiusa il segnale di disturbo $d(t) = sin(2t)$ risulta attenuato in uscita di almeno 10 volte.
4. Supponiamo che $a = 4$ e che questo valore sia noto con una precisione del 10%. Determinare i valori di K tali da assicurare che il guadagno in continua tra $r(t)$ e $y(t)$ sia fissato a meno di un errore pari al 1%.

Esercizio 3. Supponiamo ora che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + a}$$

1. Si determini a in modo che -1 sia punto doppio del luogo.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario e angoli ingresso/uscita).

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il modi **puramente** oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti). In corrispondenza a tale valore di K determinare i rimanenti modi del sistema.

4. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+5s+4}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ determinando eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e con l'asse immaginario.

3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{5}{s+1/2}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini due compensatori $C_1(s)$ e $C_1(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino ≤ 0.01 per entrambi;

2. margine di fase circa uguale a 45^0 per $C_1(s)$ e circa uguale a 90^0 per $C_2(s)$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 5$ per $C_1(s)$ e $\omega_A \simeq 500$ per $C_2(s)$

Esercizio 6 (Teorico) Spiegare i principi su cui si basa la sintesi di Bode (o sintesi in frequenza). Spiegare il problema che tale metodo intende risolvere e su quali argomenti si basa.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) Sia z la posizione del secondo carrello. Allora le equazioni ~~del~~ del moto sono

$$\begin{cases} -m_1\ddot{z} - b(\dot{z}-\dot{y}) - k(z-y+L) - m_1 g \sin\theta = 0 \\ -m_2\ddot{y} - b(\dot{y}-\dot{z}) - k(y-z-L) + u = 0 \end{cases}$$

2) Se $u(t)=\bar{u}$ $\quad y(t)=\bar{y}$ $\quad z(t)=\bar{z}$. Le equazioni diventano

$$\begin{cases} -k(\bar{z}-\bar{y}+L) - m_1 g \sin\theta = 0 \\ -k(\bar{y}-\bar{z}-L)+\bar{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u} = m_1 g \sin\theta \\ \bar{y} = \bar{z} + L + \dfrac{m_1 g \sin\theta}{k} \end{cases}$$

3) Cambiamento di variabile $\tilde{z}(t) \triangleq z(t)-\bar{z}$ $\quad \tilde{y}(t)=y(t)-\bar{y}$ $\quad \tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u}$

Allora le equazioni diventano

$$\begin{cases} -m_1\ddot{\tilde{z}} - b(\dot{\tilde{z}}-\dot{\tilde{y}}) - k(\tilde{z}+\cancel{\bar{z}}-\tilde{y}-\cancel{\bar{y}}+\cancel{L}) - \cancel{m_1 g \sin\theta} = 0 \\ -m_2\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}}-\dot{\tilde{z}}) - k(\tilde{y}+\cancel{\bar{y}}-\tilde{z}-\cancel{\bar{z}}-\cancel{L}) + \tilde{u}+\cancel{\bar{u}} = 0 \end{cases}$$

Sia $Y(s)=\mathcal{L}(\tilde{y})$ $\quad Z(s)=\mathcal{L}(\tilde{z})$ e $U(s)=\mathcal{L}(\tilde{u})$

$$\begin{cases} -m_1 s^2 Z(s) - b(sZ(s)-sY(s)) - k(Z(s)-Y(s)) = 0 \\ -m_2 s^2 Y(s) - b(sY(s)-sZ(s)) + k(Y(s)-Z(s)) + U(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_1 s^2+bs+k)Z(s) = (bs+k)Y(s) \Rightarrow Z(s) = \dfrac{bs+k}{m_1 s^2+bs+k}Y(s) \\ (m_2 s^2+bs+k)Y(s) = (bs+k)Z(s)+U(s) \end{cases}$$

$$(m_2 s^2+bs+k)Y(s) = \frac{(bs+k)^2}{m_1 s^2+bs+k}Y(s) + U(s)$$

$$\left[(m_2 s^2+bs+k)(m_1 s^2+bs+k) - (bs+k)^2\right]Y(s) = (m_1 s^2+bs+k)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{m_1 s^2+bs+k}{(m_2 s^2+bs+k)(m_1 s^2+bs+k)-(bs+k)^2}U(s)$$

$\boxed{ES.2}$

1. $T(s) = T_{zy}(s) = \dfrac{k}{s^2+s+a+k}$ Per la regola di Cartesio è BIBO stabile $\iff a+k>0$

2. $S_a^T(s) = a \dfrac{1}{T} \dfrac{\partial T}{\partial a} = a \dfrac{\cancel{s^2+s+a+k}}{\cancel{k}} \dfrac{-\cancel{k}}{[s^2+s+a+k]^{\cancel{2}}} = \dfrac{-a}{s^2+s+a+k}$

3. $T_{dy}(s) = \dfrac{1}{s^2+s+a+k} = \dfrac{1}{s^2+s+4+k}$

$T_{dy}(2j) = \dfrac{1}{\cancel{-4}+2j\cancel{+4}+k}$ $\qquad |T_{dy}(2j)| \leq \dfrac{1}{10}$ $\qquad |T_{dy}(2j)|^2 \leq \dfrac{1}{100}$

$|T_{dy}(2j)|^2 = \dfrac{1}{k^2+4} \leq \dfrac{\cancel{100}}{100} \iff k^2+4 \geq 100 \iff \boxed{k \geq \sqrt{96}}$

4. Sappiamo che $\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right| = \left|\dfrac{\Delta a}{4}\right| \leq \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

Vogliamo che $\left|\dfrac{\Delta T}{T}\right| \leq \dfrac{1}{100}$

Noto che

$\left|\dfrac{\Delta T}{T}\right| = \left|S_a^T \dfrac{\Delta a}{a}\right| = \left|\dfrac{-a}{s^2+s+a+k}\right| \left|\dfrac{\Delta a}{a}\right| \leq \dfrac{1}{100}$

Valutiamo per $a=4$ e $s=0$ (dato che si parla di guadagno in continua)

$\dfrac{1}{100} \geq \left|\dfrac{-4}{4+k}\right| \left|\dfrac{\Delta a}{a}\right| = \dfrac{4}{|k+4|} \dfrac{1}{10}$

Stabilità ci dice che $k+4>0$ e quindi

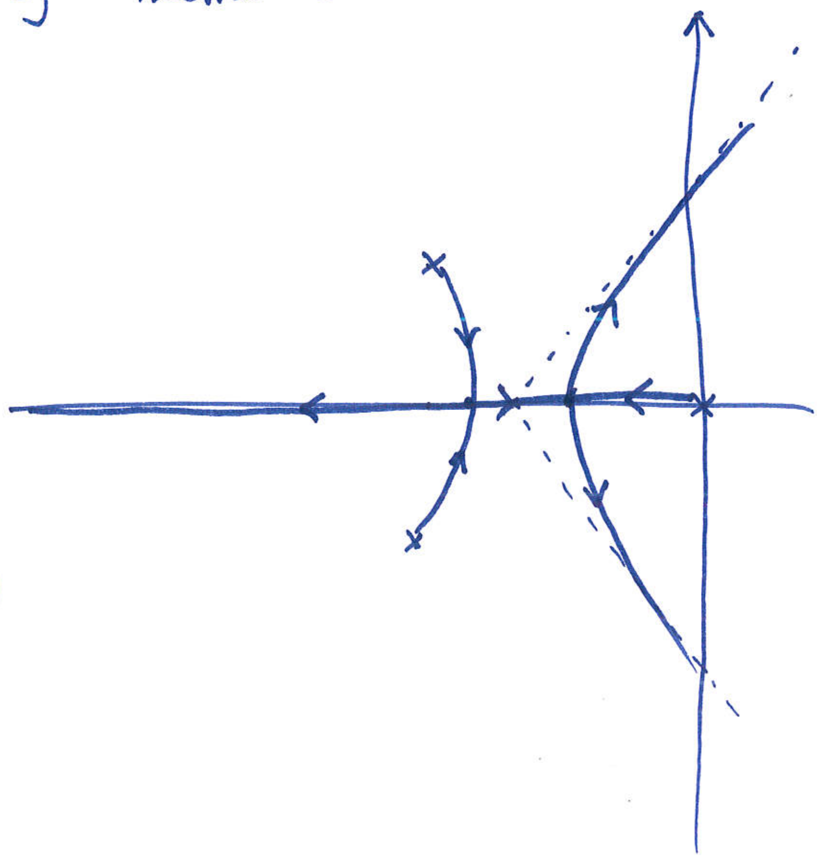
$\dfrac{4}{k+4} \dfrac{1}{\cancel{10}} \leq \dfrac{1}{\cancel{100}\,10}$

$\dfrac{k+4}{\cancel{4}} \geq 10 \qquad k+4 \geq 40 \qquad \boxed{k \geq 36}$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1) $\begin{cases} s(s^2+4s+a)+k=0 \\ 3s^2+8s+a=0 \end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases} -1+4-a+k=0 \\ 3-8+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=5 \end{cases}$

2) poli $p_1=0$ $\quad p_{2,3}=-2\pm j$ $\quad$ nessun zero



asintoti

$$\sigma_a=\frac{p_1+p_2+p_3}{3}=-\frac{4}{3}$$

punti doppi

$$\begin{cases} s(s^2+4s+5)+k=0 \\ 3s^2+8s+5=0 \end{cases}$$

$$s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-15}}{3}= \begin{cases} -1 \ (k=2) \\ -\frac{5}{3} \ \left(k=\frac{50}{27}\right) \end{cases}$$

Intersezione asse immaginario

s^3+4s^2+5s+k

3	1	5
2	4	k
1	$\frac{20-k}{4}$	
0	k	

$k=20$ intersezione

$4s^2+20=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{5}$

3) Modi puramente oscillatori $\Rightarrow$ punti del luogo ~~con~~ puramente immaginari corrispondenti a $k=20$. Per tale k il polinomio è $s^3+4s^2+5s+20$ che è divisibile per s^2+5. La divisione dà $s+4$. I modi sono $\sin(\sqrt{5}t)$, $\cos(\sqrt{5}t)$, e^{-4t}

4) Il modo e^{-t} si ottiene per $k=2$ in corrispondenza del punto doppio in -1. Quindi $(s+1)^2$ divide il polinomio $s(s^2+4s+5)+2$ e il risultato della divisione è $s+2 \xrightarrow{\text{modi}} e^{-t}, te^{-t}, e^{-2t}$

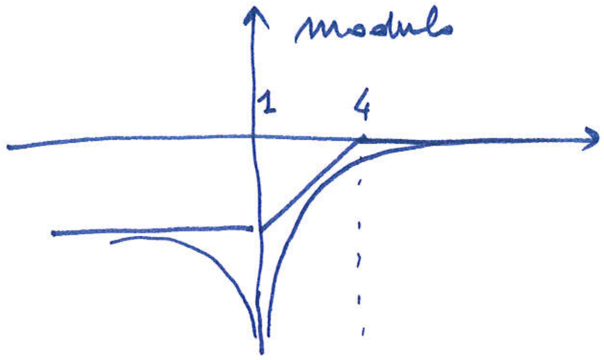
ES. 4

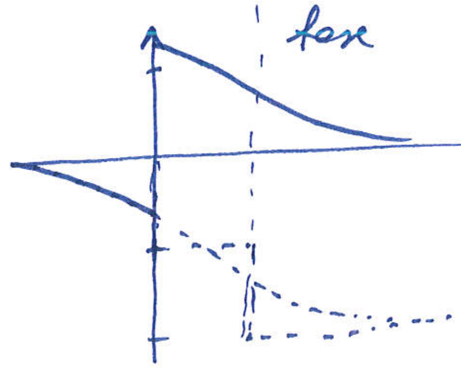
1) $G(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2+5s+4} = \dfrac{s^2+1}{(s+1)(s+4)} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1+s^2}{(1+s)(1+\frac{s}{4})}$ Forma di Bode

punti di spezzamento

$\omega_1 = 1 \qquad \omega_2 = 4$

Abbiamo un annullamento in $\omega = 1$
e la fase ha lì una discontinuità





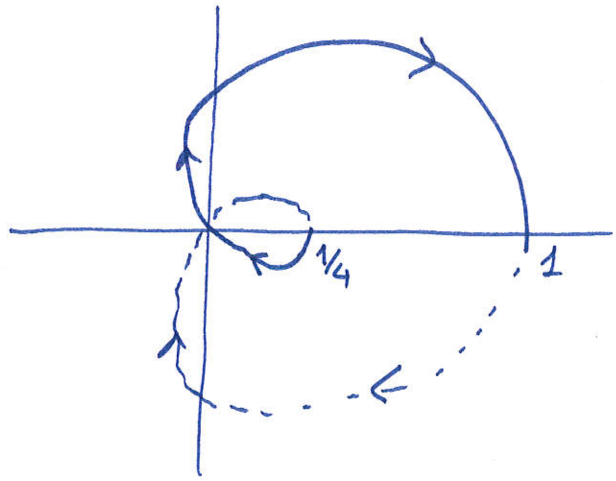
2) $G(j\omega) = \dfrac{1-\omega^2}{(1+j\omega)(4+j\omega)} =$

$= \dfrac{(1-\omega^2)(1-j\omega)(4-j\omega)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$

$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = \dfrac{(1-\omega^2)(4-\omega^2)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$

$\mathrm{Im}\, G(j\omega) = \dfrac{-(1-\omega^2)\,5\omega}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$

	Re	Im
$\omega = 0$	$\frac{1}{4}$	0
$\omega = 1$	0	0
$\omega = 2$	0	3/10
$\omega = \infty$	1	0



3) $P = 0$

$-\frac{1}{k} < 0 \ (k > 0) \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = -N = 0$ stabile in catena chiusa

$0 < -\frac{1}{k} < \frac{1}{4} \ (k < -4) \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = -N = 2$ poli instabili in catena chiusa

$\frac{1}{4} < -\frac{1}{k} < 1 \ (-4 < k < -1) \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = -N = 1$ poli instabili

$-\frac{1}{k} > 1 \ (-1 < k < 0) \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = -N = 0$ stabile

ES. 5

$$G(s) = \frac{5}{s+\frac{1}{2}} = \frac{10}{1+2s}$$

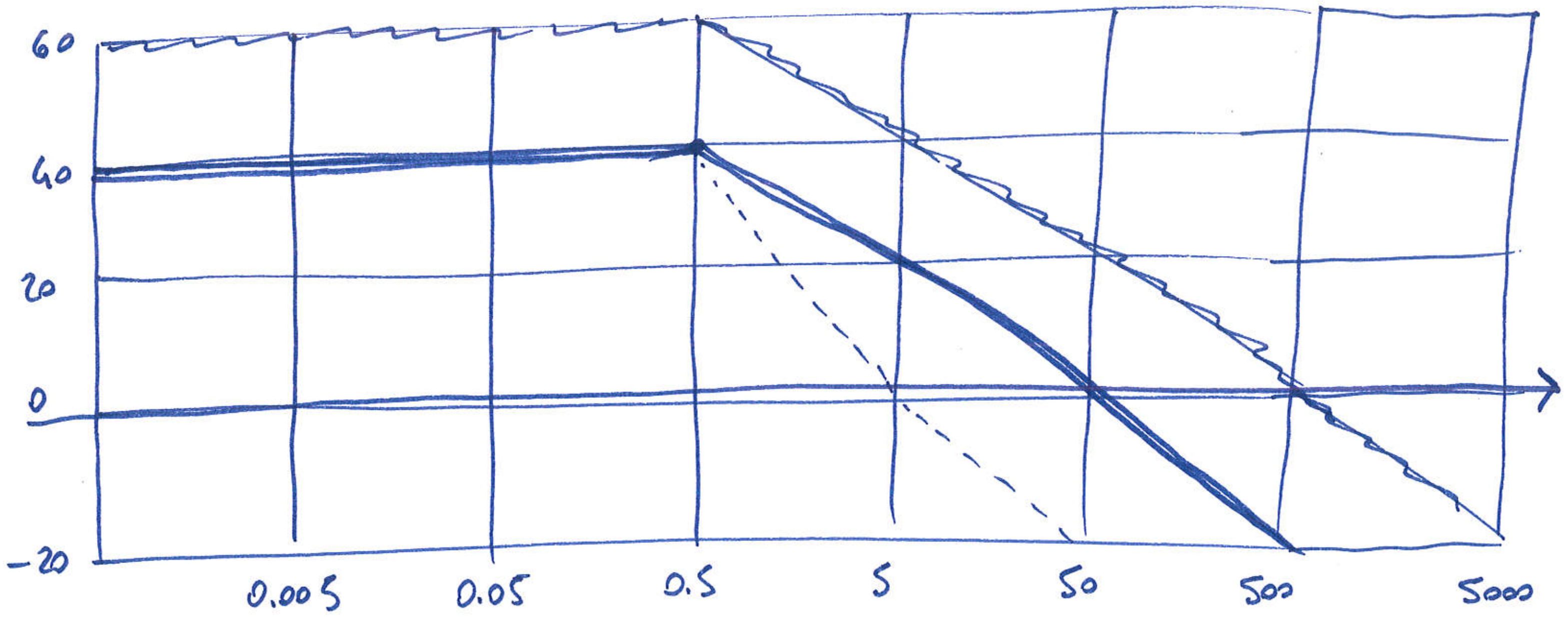
Per avere rideato al gradino con errore $\leq 0{,}01 = \frac{1}{100}$ dobbiamo avere un guadagno di Bode complessivo

$$K_c K_G \geq 100 - 1 \simeq 100$$

Siccome $K_G = 10 \Rightarrow \cancel{K_C} \geq 10 \Rightarrow K_c = 10$

$$C(s) = K_c \bar{C}(s)$$

$$\hat{W}(s) = K_c G(s) = \frac{100}{1+2s}$$



$$\bar{C}_1(s) = \frac{1+0{,}2s}{1+2s} \qquad C_1(s) = 10\,\frac{1+0{,}2s}{1+2s}$$

Per $C_2(s)$ basta aumentare il guadagno di Bode

$$C_2(s) = 100$$

Controllore alternativo

$$C_2(s) = 10\,\frac{1+2s}{1+0{,}2s}$$